# 编队乘涡飞行后机可行域构建

孙熠骐，王耀坤
（北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100191）

**摘　要：**编队乘涡飞行是指僚机利用长机翼尖尾涡上洗气流，实现诱导减阻、降低油耗的飞行方式。但在实际飞行中，最高减阻阵位与尾涡涡核相邻，诱导滚转力矩对随机扰动高度敏感，导致可长期保持的安全阵位范围难以量化。本文面向运输类飞机松散编队巡航工况，以减阻率为收益指标、滚转控制比为安全约束，提出一种三维概率可行域构建方法。首先结合随机两阶段尾涡消散模型与诱导速度模型提出一种尾涡快速计算模型，求解僚机诱导减阻率与诱导滚转力矩；然后引入蒙特卡洛仿真量化大气与机体环境中的不确定性，建立滚转控制比样本库，并利用广义极值分布对风险进行概率化表征；最后在双重置信度与减阻率指标的联合约束下，计算出可稳定维持的三维减阻空间。结果表明：放弃部分理论减阻效益，可换取具有更高安全性、可长期保持的减阻阵位区域。

**关键词：**编队飞行；尾涡演化；蒙特卡洛仿真；广义极值分布；概率安全域
**中图分类号：**V212.1　　**文献标识码：**A

# Construction of feasible region for following aircraft in wake vortex following flight

SUN Yiqi, WANG Yaokun
(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Formation flight in wake vortex following refers to a flight mode in which the follower aircraft utilizes the upwash flow from the leader's wingtip vortices to achieve induced drag reduction and reduce fuel consumption. However, in actual flight, the position of maximum drag reduction is adjacent to the vortex core, and the induced rolling moment is highly sensitive to random disturbances, making it difficult to quantify the safe position range that can be maintained over long durations. This paper focuses on the loose formation cruise condition of transport aircraft, taking drag reduction rate as the benefit metric and roll control ratio as the safety constraint, and proposes a three-dimensional probabilistic feasible region construction method. First, a fast wake vortex computation model is proposed by combining a stochastic two-stage wake vortex dissipation model with an induced velocity model to solve the induced drag reduction rate and induced rolling moment of the follower aircraft. Then, Monte Carlo simulation is introduced to quantify uncertainties in atmospheric and aircraft environments, a sample library of roll control ratio is established, and the generalized extreme value distribution is used to probabilistically characterize the risk. Finally, under the joint constraints of dual-confidence levels and the drag reduction rate metric, a stably maintainable three-dimensional drag reduction space is solved. The results show that sacrificing part of the theoretical drag reduction benefit can be exchanged for a drag reduction position region with higher safety and long-term maintainability.

**Key words:** formation flight; wake vortex evolution; Monte Carlo simulation; generalized extreme value distribution; probabilistic safety region

**收稿日期：**2026-09-03；　**修回日期：**2026-10-05
**基金项目：**国家自然科学基金(52472184)
**通信作者：**王耀坤(1986—)，男，博士，副教授。E-mail: wangyaokun@buaa.edu.cn
**引用格式：**孙熠骐，王耀坤. 编队乘涡飞行后机可行域构建[J]. 航空工程进展.
SUN Yiqi, WANG Yaokun. Construction of feasible region for following aircraft in wake vortex following flight[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering. (in Chinese)

## 0 引 言

随着绿色低碳发展的需求日益迫切，编队乘涡飞行正成为国际航空界的研究热点[1]。该技术通过把僚机置于长机翼尖尾涡外侧的上洗气流中，在不改变机体结构、不增加任何装机重量的前提下直接削减僚机的诱导阻力。然而，如何在僚机获得增升减阻效益的同时，高效量化评估复杂大气环境下的编队飞行可行域，是实现乘涡飞行实际应用的难点之一。

从应用对象看，编队乘涡飞行的主要落点是军用运输机与作战飞机编队。2002年美国航空航天局（NASA）的F/A-18自主编队飞行项目实测到僚机阻力减小超过20%、燃油流量减小超过18%[2]；2012年起针对C-17运输机的编队飞行进一步验证了长时间油耗降低10%以上的可行性[3]。虽然民航领域短期内难以大规模应用编队飞行，但相关先导性验证已初步开展：空客fello′fly项目于2021年使用A350在跨大西洋航路上完成了首次受管制空域内的长航程双机编队演示，印证了长航程航线5%以上的节油潜力[1]。

针对尾涡干扰与可行域边界问题，国内外研究者开展了广泛研究。国外，Zumegen等[4]计算了不同大型客机组合与不同工况下，长机尾涡对僚机的诱导减阻效益，但受限于涡格法计算流程长、耗时多，无法满足复杂工况编队的快速响应需求；Spark等[5]比较了基于升力线法和非定常涡格法的尾流涡速度模型，但未将减阻收益、滚转控制概率边界与阵位决策统一为可行域框架。

国内，柳文林等[6]研究者针对同型飞机侧后方及正后方编队飞行，基于CFD气动计算分析了长机尾流对僚机升力、阻力及滚转力矩的影响，提出了最佳队形和飞行操纵建议，但缺乏对可靠性更高的松散编队飞行的研究；李蕴洛等[7]研究者通过计算流体力学（CFD）计算验证了等效尾涡减阻快速计算方法，并定量分析了无人机编队飞行的减阻效果，但将方法迁移至安全性要求更高的大型飞机上仍需进一步研究；在不确定性量化方面，魏志强等[8]针对尾涡涡核的下沉高度特性开展了蒙特卡洛仿真实验并分析了影响因素，但未对影响尾涡的多种因素进行综合分析并将结果应用至编队飞行领域。

综合来看，减阻收益与高安全性的约束边界划分缺乏统一的量化框架。为此，本文建立尾涡诱导作用的快速计算模型；引入蒙特卡洛仿真量化大气与飞机参数的不确定性，以广义极值分布刻画安全指标的尾部行为，得到阵位可保持性的概率边界；结合减阻收益分布与概率边界，构建可直接用于阵位决策的三维减阻可行域。

## 1 尾涡快速计算模型

### 1.1 尾涡演化模型

当机翼产生升力时，上下表面压差会使得空气从翼尖由下向上绕流，形成翼尖涡[9]。当飞机处于小迎角、十倍翼展以上的尺度下，长机的尾涡可简化为一对由机翼翼尖涡主导、强度相同、旋转方向相反的点涡[10]。僚机通过在长机的尾涡特定位置获得上洗升力，从而实现编队乘涡飞行，涡流冲浪原理图如图1所示。

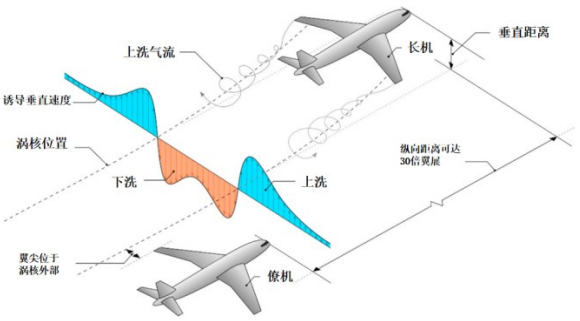



图1 涡流冲浪原理图

Fig. 1 Vortex surfing schematic diagram

尾涡强度通常用环量$\Gamma$来表征，其初始值可根据机翼提供的升力来估算。

$$\Gamma_0 = \frac{mg}{\rho V_\infty b_0} \tag{1}$$

式中：$m$为长机重量；$g$为重力加速度；$\rho$为空气密度；$V_\infty$为飞机飞行真空速；$b_0$为长机初始涡间距，$b_0 = \frac{\pi B}{4}$，$B$为长机翼展。

本文采用随机两阶段模型（Probabilistic Two-Phase，以下简称P2P模型）预测强度演化，并结合诱导Burnham-Hallock模型（以下简称B-H模型），实现对巡航飞行条件下尾涡诱导场的中远场数值快速仿真。

1）尾涡强度衰减

P2P模型涵盖了风场、湍流、温度层结等一阶环境参数对尾涡演化的影响，对于高空巡航尾涡

特征的数值仿真具有一定可靠性。尾涡衰减过程划分为扩散阶段与快速衰减阶段。P2P公式为

$$\Gamma^*_{5-15}(t^*)=$$

$$A-\exp\left[-\frac{R^{*2}}{\nu_1^*(t^*-T_1^*)}\right](0\leqslant t^*\leqslant T_2^*) \quad (2)$$

$$\Gamma^*_{5-15}(t^*)=A-\exp\left[-\frac{R^{*2}}{\nu_1^*(t^*-T_1^*)}\right]-\exp\left[\frac{R^{*2}}{\nu_2^*(t^*-T_2^*)}\right](t^*\geqslant T_2^*) \quad (3)$$

式中:$\Gamma^*_{5-15}$为P2P模型中5~15 m平均环量的无量纲值;$t^*$为无量纲时间常数,与飞机的初始参数相关;$A$为调节尾涡初始值的常数;$R^*$为尾涡平均半径;$T_1^*$为扩散阶段起始$t^*=0$的时间;$\nu_1^*$为扩散阶段的有效黏性系数;$T_2^*$为尾涡的第二阶段快速衰减开始的时间;$\nu_2^*$为快速衰减阶段有效黏性系数,与大气环境相关。

2) 尾涡诱导速度

在常见的尾涡诱导速度模型中,B-H模型公式统一且计算精度高,与实际飞行测量数据高度吻合[10],因此,本文采用B-H模型作为诱导速度模型。

$$v_\theta(r)=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{r}{r_c^2+r^2} \quad (4)$$

式中:$r$为该点与涡核中心的距离;$r_c$为涡核半径,与长机翼展相关。

## 1.2 尾涡运动模型

尾涡的三维轨迹的运动形式可拆分为半径扩大、下沉运动与阵风漂移的组合。以飞机质心为坐标原点建立编队乘涡飞行坐标系[7]:沿飞机飞行速度方向定义为$x$轴,重力方向定义为$z$轴,垂直于$XOZ$平面指向长机左机翼的方向定义为$y$轴,长机质心为原点$O$。一对翼尖涡向后运动并向下沉降,如图2所示。

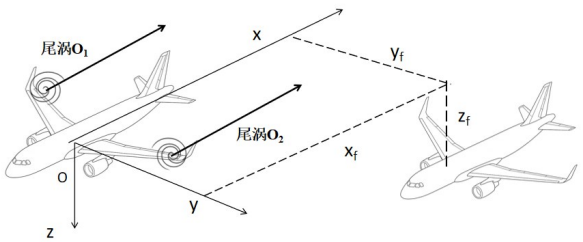



图2 编队乘涡飞行坐标系建立

Fig. 2 Coordinate system for formation flight in wake vortex

1) 半径扩大

在B-H模型中,涡核半径被定义为切向速度达到最大值处的半径[11]。结合P2P模型中的特征时间参数和特征环量参数,第1阶段与第2阶段的涡核半径演化模型分别表述为:

$$r_c^*(t^*)=\sqrt{1+4\nu_1^*(t^*-T_1^*)}\ (T_1^*\leqslant t^*<T_2^*) \quad (5)$$

$$r_c^*(t^*)=\sqrt{1+4\nu_1^*(T_2^*-T_1^*)+4\nu_2^*(t^*-T_2^*)}\ (t^*\geqslant T_2^*) \quad (6)$$

2) 下沉运动

由于单个点涡作用产生的诱导速度在另一个点涡位置的方向为垂直向下,在互相诱导作用下长机尾涡会同步缓慢下沉,由相关公式可以得到尾涡的下移速度公式:

$$V_{mz}(t)=\frac{\Gamma_0\Gamma^*_{5-15}}{2\pi}\frac{b_0}{r_c(t)^2+b_0^2} \quad (7)$$

3) 阵风漂移

环境风中的正侧风与顶风会引起尾涡的位置漂移[12],定义沿$x$轴反向的环境风场宏观分量为顶风$U_x$,$y$轴方向的水平分量为正侧风$U_y$。以顶风为例,若通过探空数据得到顶风风速为$U_x$,则尾涡沿$x$轴漂移$x_m(t)$表示为

$$x_m(t)=x_m(0)+U_xt \quad (8)$$

## 1.3 乘涡飞行诱导计算

在编队乘涡飞行时,僚机的节能效益可用阻力系数减少率$D_{cD}$表征[13]。

$$C_{Da}=C_{D0}+C_{D2}\left(\frac{2m_fg}{\rho_\infty v_f^2S}\right)^2 \quad (9)$$

$$C_{Db}=C_{D0}+C_{D2}\left[\frac{2(m_fg-\Delta L)}{\rho_\infty v_f^2S}\right]^2 \quad (10)$$

$$D_{cD}=1-\frac{C_{Db}}{C_{Da}} \quad (11)$$

式中:$C_{Da}$为僚机正常巡航飞行时的阻力系数;$C_{Db}$为受到长机诱导作用下的阻力系数;$C_{D0}$为零升阻力系数,诱导阻力因子$C_{D2}$与诱导升力$\Delta L$的计算公式为

$$C_{D2}=\frac{1}{\pi A_fe} \quad (12)$$

$$\Delta L=\frac{1}{2}\rho v_f^2\int_{-\frac{B_f}{2}}^{\frac{B_f}{2}}C_L'(y)c(y)dy \tag{13}$$

式中：$C_L'$为升力线斜率；$B_f$为僚机翼展；$c(y)$为展向弦长分布；$A_f$为机翼展弦比；$e$为效率因子。

基于编队乘涡飞行坐标系，长机尾涡对僚机的诱导速度可进行正交分解。设左侧尾涡环量强度为$\Gamma_1=\Gamma_0\Gamma_{5-15}^*$；右侧尾涡环量强度为$\Gamma_2=-\Gamma_0\Gamma_{5-15}^*$。对于流场中任意一点A(x,y,z)，该坐标系下点A的垂直诱导速度$V_z$表达式为

$$V_z=\frac{\Gamma_1(y-y_1)}{2\pi\left[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+r_c^2\right]}+\frac{\Gamma_2(y-y_2)}{2\pi\left[(y-y_2)^2+(z-z_2)^2+r_c^2\right]} \tag{14}$$

编队乘涡飞行气动风险主要源于尾涡在僚机翼展处引起的诱导速度，进而产生对应的诱导滚转力矩[14]。因此本文选取诱导滚转力矩作为安全域的构建指标。

得到诱导速度后，结合飞机参数、飞行工况，进一步可求得诱导速度带来的升力变化，并基于空气动力学中的片条理论[15]，通过对沿翼展方向的气动力进行积分，即可得到僚机所受的诱导滚转力矩$M_R$。

$$M_R=\int_{-B_f/2}^{B_f/2}y\cdot d(\Delta L) \tag{15}$$

## 1.4 尾涡计算模型适用范围

尾涡计算模型将长机卷起后的涡系简化为一对强度为$\Gamma_0$、间距为$b_0$转向相反的集中涡，称点涡近似。本节以多涡丝卷起模型为参考解，量化本模型在巡航工况下的误差及其对迎角、展弦比与纵向间隔的敏感性，据此确定适用边界。

按Spreiter-Sacks卷起理论[16]，椭圆载荷机翼后涡面基本完成卷起所需的下游距离可估计为

$$x_r\approx k_r(A/C_L)B \tag{16}$$

式中：$A$为长机展弦比；$C_L$为长机升力系数；$k_r$为卷起理论常数，取0.28。

常见运输类飞机尾涡卷起所需的下游距离如表1所示。

表1 尾涡卷起所需的下游距离

Table 1 Downstream distance required for wake vortex roll-up

| 机型 | 典型质量/kg | 翼展/m | 展弦比 | 典型升力系数 | 距离/m |
|---|---|---|---|---|---|
| 波音747-400 | 396 890 | 64.40 | 7.7 | 0.5 | 277.7 |
| 空客A320 | 78 000 | 34.10 | 9.5 | 0.5 | 181.4 |
| C-130H | 70 300 | 40.40 | 10.1 | 0.5 | 228.5 |
| 塞斯纳172 | 1 110 | 11.00 | 7.32 | 0.4 | 56.4 |

为定量评估在不同展弦比与迎角下点涡近似的误差，以多涡丝离散卷起模型作为参考解[17]：将长机展向环量分布$\Gamma(y)$离散为$n_v$条自由涡丝，各涡丝强度$\Delta\Gamma_j$取该展向段内环量的增量，第$j$条涡丝在二维截面内的诱导速度为流场中全部涡丝诱导速度的矢量叠加，随时间推进涡丝在相互诱导下逐步卷起为翼尖涡对[18]；定义在同一$YZ$截面、同一阵位网格P下，点涡模型相对参考模型的两项误差：

$$\varepsilon_M=\frac{\max\limits_P|M_R^{PV}-M_R^{ref}|}{\max\limits_P|M_R^{ref}|} \tag{17}$$

$$\varepsilon_{Dcd}=\frac{\max\limits_P|Dcd_R^{PV}-Dcd_R^{ref}|}{\max\limits_P|Dcd_R^{ref}|} \tag{18}$$

式中：上标PV、ref分别表示点涡模型与参考模型。$\varepsilon_M$反映诱导滚转力矩误差，$\varepsilon_{Dcd}$反映阻力系数减少率误差。

敏感性分析采用单因素扫描：由于卷起距离与升力系数负相关，取$C_L$=0.5表征尾涡较难卷起的工况；展弦比取A=7.5、9.5，覆盖运输类飞机典型范围；取纵向间隔$x$为200～2 000 m，$YZ$截面为600 m*400 m。各水平下两项误差随$x$的变化如图3所示。

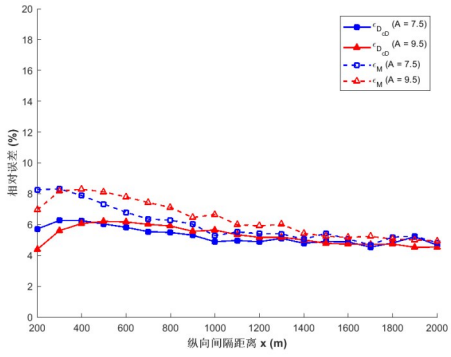



图3 点涡近似相对多涡丝卷起模型的误差

Fig. 3 Errors of point-vortex approximation relative to the multi-filament roll-up model

基于图3可给出点涡近似的适用边界:在$x\geqslant$200 m的范围内,$\varepsilon_M$与$\varepsilon_{Dcd}$均小于10%,点涡近似对模型精度的影响可以忽略。

## 2 飞行概率安全域

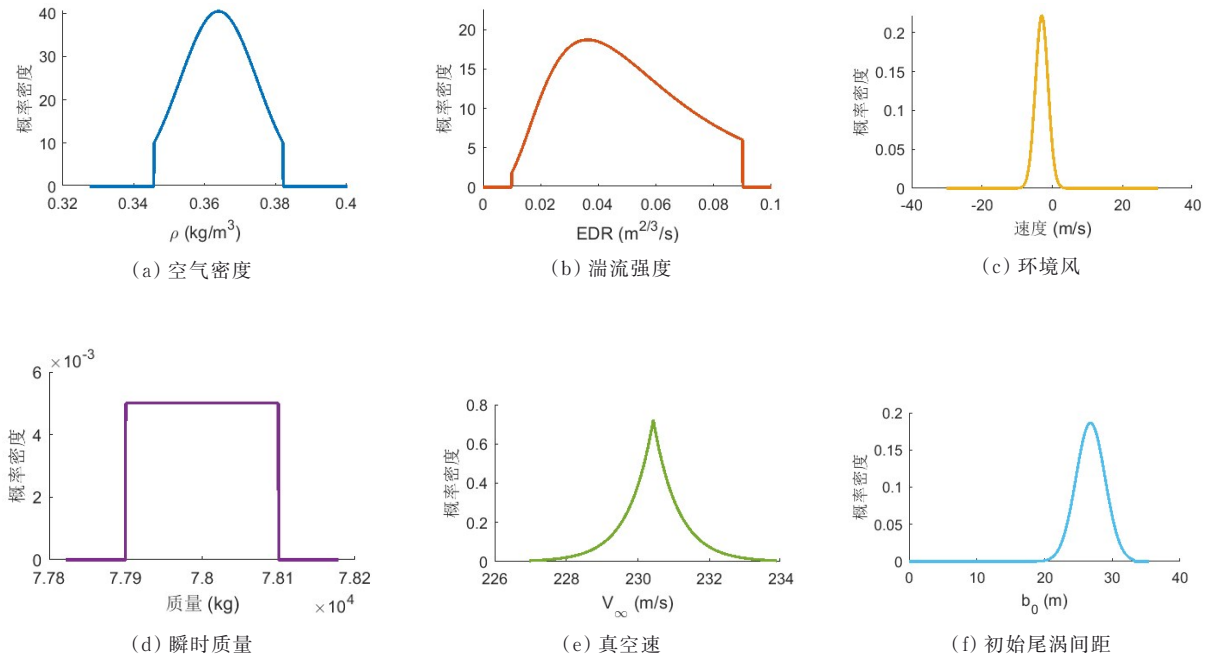
### 2.1 不确定性参数建模

在编队乘涡飞行中,现有的安全域构建多采用输入变量的极值进行线性叠加的方法[19]。然而,尾涡演化受到大气环境、飞行器参数等不确定性因素影响。为此,本节引入蒙特卡洛仿真方法,为编队乘涡飞行进行更具工程应用价值的风险量化[20]。

在编队巡航工况中,输入参数空间X主要由大气环境随机变量与航空器系统变量组成。大气环境不确定参数包括大气密度、湍流强度以及顶风正侧风风速;航空器的不确定性参数取决于长机,主要包括长机质量、长机真空速以及初始涡间距。因此,输入参数空间$X$表示为

$$\mathrm{X}=[\rho, EDR, U_x, U_y, m, V_\infty, b_0]^T \tag{19}$$

结合全球范围内的飞行数据[21]与高空巡航观测数据所拟合出的经典气候态数值[22],可以得到X不确定参数符合的分布以及边界,其分布特征如图4所示。




(a) 空气密度 (b) 湍流强度 (c) 环境风

(d) 瞬时质量 (e) 真空速 (f) 初始尾涡间距

图4 乘涡飞行不确定性参数

Fig. 4 Uncertainty parameters of wake vortex following flight

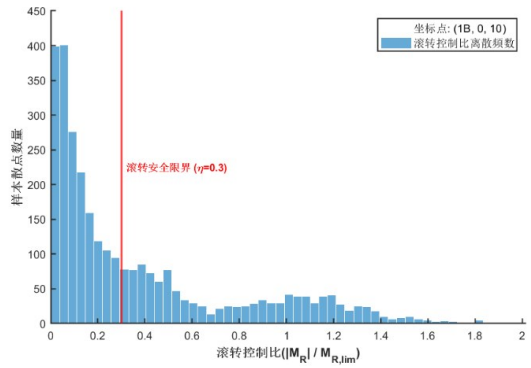
### 2.2 滚转控制比样本库

安全阈值要求滚转力矩系数不超过僚机副翼最大可用控制力矩对应的极限比例。由于副翼偏转量与滚转力矩近似呈线性关系,因此副翼偏转量与最大可用偏转量之比,等同于对应的诱导滚转力矩$M_R$与飞机可提供的最大控制滚转力矩$M_{R,lim}$之比[14],这一比例定义为滚转控制比$R_{CR}$,即需满足:

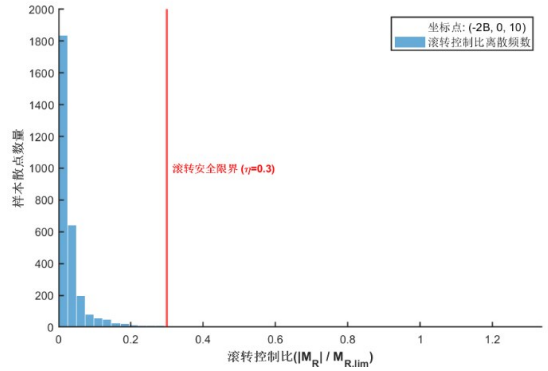
$$\left|\frac{M_R}{M_{R,lim}}\right|<RCR \tag{20}$$

在蒙特卡洛仿真初始化阶段,系统生成$N$组独立的随机样本序列。为满足多维极值分布拟合的收敛性与置信度要求,迭代次数$N$设定在1 000次以上。每一组随机样本$X(i)$表示一种独立干扰工况。在$N$次数值计算中,算法在各时空网格点$(y,z,t)$上,对截面各离散点执行蒙特卡洛动力学求解循环。代入随机不确定性参数后,计算得到僚机的局部迎角与滚转控制比。在此过程中,记录并存储各空间节点在$N$次迭代中的极限响应参数,输出该工况下基于滚转控制比的样本库。

以坐标点$(B,0,10)$与坐标点$(-2B,0,10)$为例,可得到这两个坐标点在该基准工况下经过$N$次仿真后滚转控制比的分布。滚转控制比蒙特卡洛样本库示例如图5所示,横坐标为滚转控制比的值,纵坐标为该值对应的频率分布。




(a) 坐标点($B$,0,10)




(b) 坐标点(−2$B$,0,10)

图5 滚转控制比蒙特卡洛样本库示例

Fig. 5 Monte carlo sample library example of roll control ratio

对比两个空间特征点的频率直方图可以看到,对于距离涡核较远的坐标点(-2$B$,0,10),蒙特卡洛抽样得到的滚转控制比样本集中在低值区间,说明该位置受尾流扰动微弱;在距离涡核较近的坐标点(1$B$,0,10)处,尾涡诱导速度对侧风脉动与湍流耗散等随机环境参数敏感,样本分布范围更宽,更多样本超过安全极限存在失控风险。

蒙特卡洛仿真能够刻画气动风险响应的完整概率形态,而非仅提供单一的确定性极值。基于该方法,可进一步完成尾涡后时空节点的滚转控制比样本库计算,为进行概率安全域构建提供了数据基础。

## 2.3 极值分布求解

根据极值统计理论,独立分布随机变量区块极大值的渐近分布收敛于广义极值分布(GEV)[23]。GEV的标准数学表达式为

$$\mathrm{H}(x)=\exp\left(-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right) \tag{21}$$

式中:$\mu$为极值分布的中心位置;$\sigma$为极值波动的离散幅度;$\xi$为分布的尾部衰减特征变量。

本文采用最大似然估计进行参数估计,最大似然估计的原理是寻找一组参数,使已知样本序列发生的概率达到最大[24]。似然函数定义为全体样本点概率密度值的乘积,最大似然估计的任务是寻找最佳参数向量,使对数似然函数取得极大值,并满足可行域约束,实际求解中常将GEV函数取对数,得到对数似然函数$\mathrm{L}(x)$,将乘积项等效转化为累加形式[25],$\mathrm{L}(x)$的表达式为

$$L(\mu,\sigma,\xi)=-n\ln\sigma-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} \tag{22}$$

为进一步论证蒙特卡洛仿真次数$N$取值合理性,将迭代次数拓展至$10^5$次,以该大样本下的极大似然估计解$\hat{\theta}\in\{\hat{\xi},\hat{\sigma},\hat{\mu}\}$作为全局基准真值,评估不同抽样规模N下参数估计的收敛进程。样本量N对应的剩余相对波动量$\delta_\theta(N)$定义为相对基准解的最大剩余偏离幅度[26],即:

$$\delta_\theta(N)=\max_{k\geqslant N}\left|\frac{\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}}{\hat{\theta}}\right|\times 100\% \tag{23}$$

以某大型飞机编队乘涡飞行为例,取飞行高度11 000 m、巡航速度、中等湍流强度、顶风与正侧风均为3 m/s环境,选取坐标点(-2$B$,0,10),$N$取不同值下$\mu$、$\sigma$与$\xi$的波动量如图6所示。

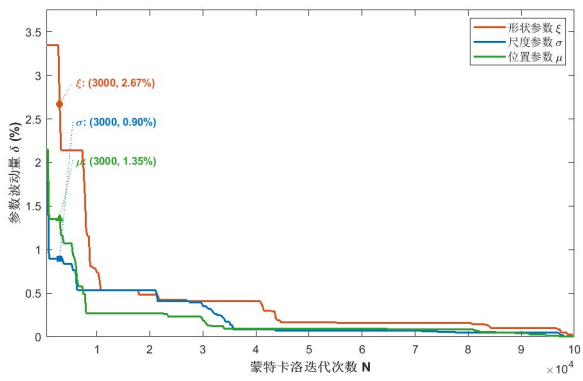



图6 GEV参数波动值

Fig. 6 GEV parameter fluctuation values

从图6可以看出:随着迭代次数增加,参数的波动值迅速收敛。在$N$=3 000时,相关GEV参数与$N$=$10^5$相比误差均在3%以内,$N$=3 000时的滚转控制比样本库已基本满足后续分析需求。

令迭代次数$N$=3 000,在尾涡跨度中提取11个离散时间点,每个时间点网格数为30 100,开展蒙特卡洛仿真得到滚转控制比样本库,并进行广义极值分布拟合,相应的统计数据如表2所示。

表2 广义极值分布最大似然参数统计数据
Table 2 Generalized extreme value distribution maximum likelihood parameter statistics

| 处理工况 | 拟合点数 | 拟合成功率/% | $\xi$均值 | $\xi$<0占比/% |
|---|---|---|---|---|
| 1s | 30 098 | 99.99 | −0.32 | 96.36 |
| 1.5s | 30 097 | 99.99 | −0.32 | 95.45 |
| 2s | 30 098 | 99.99 | −0.39 | 93.88 |
| 2.5s | 30 097 | 99.99 | −0.32 | 92.75 |
| 3s | 30 098 | 99.99 | −0.37 | 90.83 |
| 3.5s | 30 094 | 99.98 | −0.32 | 88.96 |
| 4s | 30 094 | 99.98 | −0.30 | 86.43 |
| 4.5s | 30 094 | 99.98 | −0.30 | 85.18 |
| 5s | 30 097 | 99.99 | −0.30 | 83.85 |
| 5.5s | 30 099 | 100.00 | −0.28 | 82.52 |
| 6s | 30 089 | 99.96 | −0.28 | 80.06 |

从表2可以看出:在极值求解拟合任务中,滚转控制比双指标的综合收敛率平均达99.97%,得到了多个演化时间下,广义极值分布在YZ平面内的位置参数、尺度参数与形状参数分布数据。

以时间点$t$=3 s为例,$\xi$在$YZ$平面内的分布如图7所示。

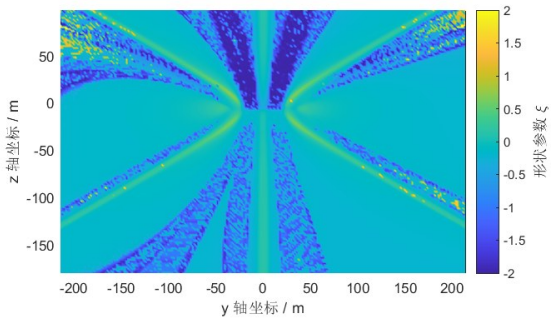


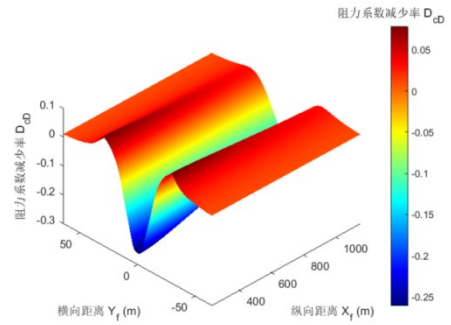

图7 $YZ$平面形状参数空间分布
Fig. 7 Spatial distribution of shape parameters in $YZ$ plane

$\xi$>0为Fréchet型,表明该网格点滚转控制比极值的右端点为无穷大,尾部按幂律衰减,存在无确定上界的极端滚转超限风险;$\xi$<0为Weibull型,表明在给定输入参数分布内,该网格点的滚转控制比都不会超过有限右端点。

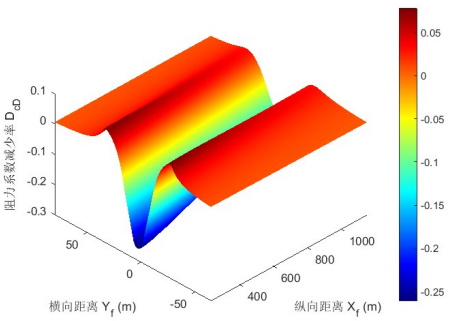
## 3 乘涡飞行可行域构建

### 3.1 减阻收益分布

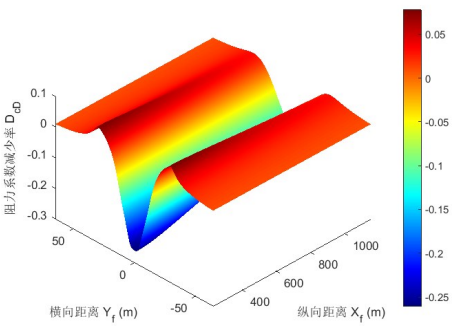
结合尾涡快速计算模型和气动参数,可求解阻力系数减少率的三维空间曲面。为得到阻力系数减少率在空间上的分布规律,选用某大型飞机作为长机与僚机,以飞行高度11 000 m、常规巡航速度为例,不同工况下阻力系数减少率分布规律如图8所示。




(a) 中湍流强度、无风环境




(b) 中湍流强度、顶风与正侧风均为3m/s




(c) 高湍流强度、无风环境

图8 阻力系数减少率
Fig. 8 Drag coefficient reduction rate

从图8可以看出：对于尾涡衰减而言，湍流强度与风速大小影响相对较小；对于尾涡的横向漂移而言，正侧风为主要因素。在纵向上，随距离由200 m增至1 100 m，尾涡强度逐渐衰减，涡核半径同步扩大，流场诱导速度分布趋于平缓，上洗气流的增升效果随之下降。当僚机处于尾涡中心外侧的上洗气流区时，减阻效益随僚机与长机的纵向距离、僚机与尾涡涡核的横向距离增加而减少；若僚机飞入两股尾涡之间的下洗气流区，阻力系数减少率呈负值。在本文采用的高空巡航、200 m以上编队距离的工况下，最高减阻率可达8%，若采用密集编队进行低空高速飞行，减阻效率可进一步增加，但风险也随之上升。

## 3.2 安全域边界

依据国际民航组织对重大失效容许概率上限为$10^{-6}$的适航规定，需要针对安全指标设定双重物理界限。双重安全置信体系如表3所示，可控指标界限为95%安全置信度，基于飞行品质规范设定RCR≤0.3；第2重界限为绝对安全指标，设定99.999 9%的安全置信度[27]。在此指标下，为防止航空器发生不可逆的滚转失控与机体结构塑性形变，设定RCR≤0.9。

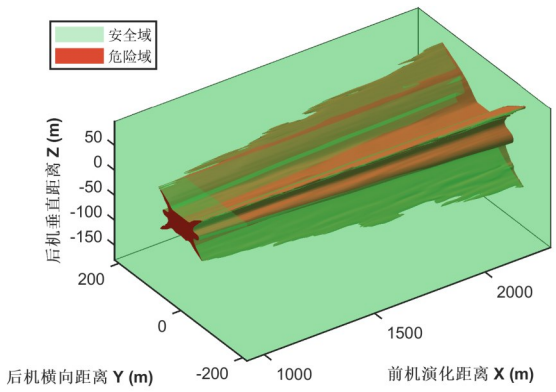
表3 双重安全置信体系

Table 3 Dual safety confidence system

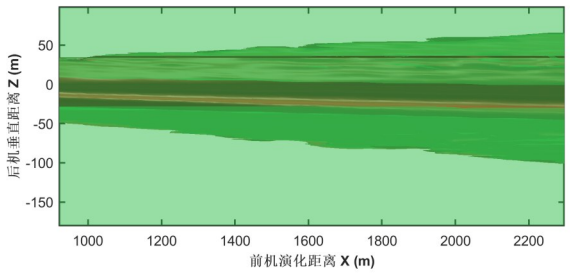
| 控制层级 | 阈值设定 | 安全置信度/% | 安全域 |
|---|---|---|---|
| 可控危险域 | RCR≤0.3 | 95.000 0 | $\Omega_{\mathrm{RCR,ctrl}}$ |
| 绝对危险域 | RCR≤0.9 | 99.999 9 | $\Omega_{\mathrm{RCR,safe}}$ |

为将上述数学集合方程映射为飞行管理系统可读取的三维二值化空间场，本研究设计了基于多维矩阵张量并行运算的流程：首先，将GEV参数载入三维空间网格，形成与坐标张量维度一致的6个三维标量场，即RCR对应的位置参数、尺度参数及形状参数；其次，定义GEV累积概率评估函数，将RCR阈值传入，与对应的三维参数进行逐元素运算，生成包含空间网格点累积概率的张量；最终，依据双重安全置信度规范，将概率张量与置信度阈值进行逐元素逻辑比较，获取不同时间点的二维概率安全域，在二值梯度场中提取标量值为0.5的空间等值面，生成对应概率安全域的三维网格数据。

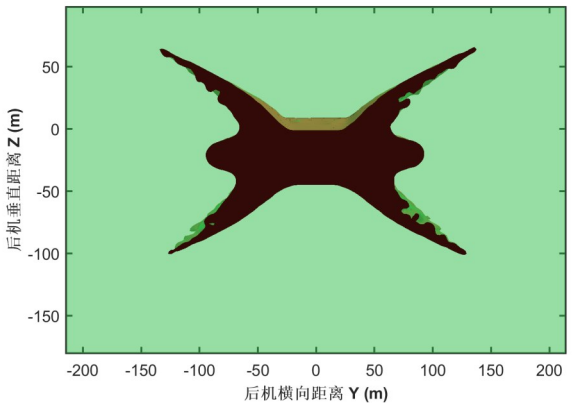
基于2.3节中的工况与计算得到的三维概率安全域网格数据，进行等值面几何曲面重构，可得到三维可视化概率安全域如图9所示。




(a) 安全域轴测图




(b) 安全域侧视图




(c) 安全域前视图

图9 概率安全域

Fig. 9 Probabilistic safe region

从图9可以看出：随着尾涡演化，危险域横向剖面呈较扁的椭圆状，并向四角延伸，尽管尾涡强度随着距离下降，概率危险域仍在外扩。这是由于空间分布不确定性引发的发散效应超过了尾涡强度衰减的影响。

### 3.3 实际可行域划分

在概率安全区域框架的基础上,可将减阻增益$D_{cD}$的空间分布$\Omega_D$与双重置信度概率安全域进行叠加分析,可以得到编队乘涡飞行可行域。

基础减阻区对应$\Omega_D^{(2)}=\{D_{cD}\geqslant 0.02\}$,在此区域内尾涡诱导速度可抵消巡航阶段的大型商用客机自身下沉率,并获取实质性基础减阻收益,为最基本气流条件[1];高效减阻区对应$\Omega_D^{(5)}=\{D_{cD}\geqslant 0.05\}$,对应在最佳横向间距下,僚机在长机尾涡下获取最大减阻效益时的诱导载荷分布[4]。危险域$\Omega_H$取表3中两个危险域的并集。

选取前后机间隔在200~1 400m的8个工况,在同一$YZ$截面叠加可控危险域、绝对危险域、基础减阻区、高效减阻区,可以得到气动效益划分图,如图10所示。

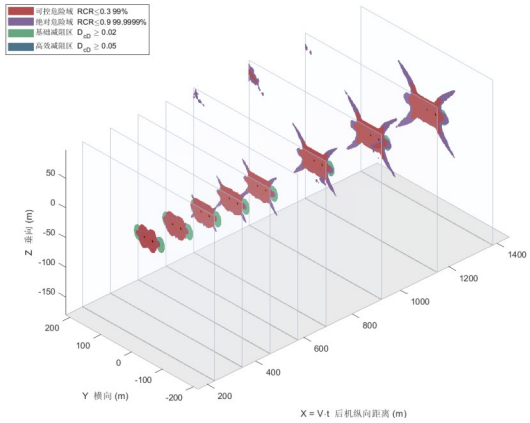


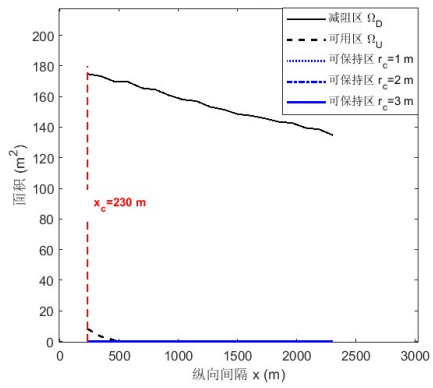

图10 气动效益划分图

Fig. 10 Aerodynamic benefit classification map

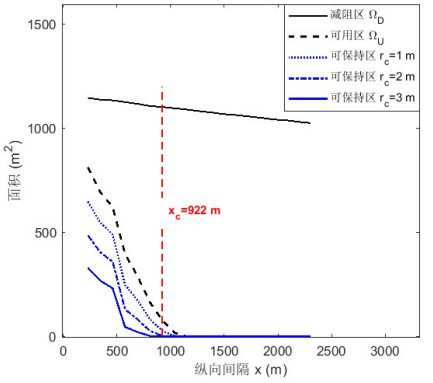
观察三维流场构型可知,随着纵向距离增加,长机双尾涡核在流场相互诱导下沿$Z$轴持续下沉。在各演化截面中,受滚转控制比限界约束的可控危险域与绝对危险域以涡核为中心向外发散。

然而在实际飞行中,现役编队自动驾驶仪的精度为米级[28],僚机无法精准驻留于单点。因此取位置保持误差均方根$r_c$,实际可行域定义为:要求以阵位为圆心、半径$r_c$的圆盘整体位于可用区内。基于同工况与时间节点进一步计算实际的可行域,如图11所示。

对于$D_{cD}\geqslant 0.05$的高效减阻区,在$x=230$ m时高效减阻区本身面积约155 m$^2$,但实际可行域在全部截面为空,不存在可稳定驻留的高效减阻阵位。对于$D_{cD}\geqslant 0.02$的基础减阻区可行域面积$\Omega_U^{(2)}$,在$x=230$ m时,基础减阻区本身面积约1 145 m$^2$,实际可行域在$r_c$取3 m时为330 m$^2$,并在$x=922$ m处降低至0 m$^2$。




(a) 高效减阻区实际可行域面积




(b) 基础减阻区实际可行域面积

图11 实际可行域面积

Fig. 11 Actual feasible region area

为与常规采用固定参数输入求解最佳编队位置的方法进行对比,本文进一步在同一工况下取$t=2.5$ s,对比定点计算与本文算法,如图12所示。

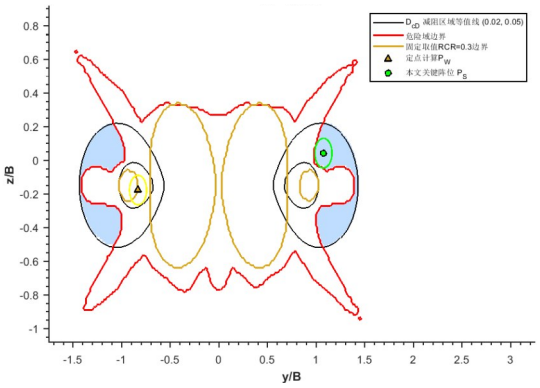



图12 常规方法与本文方法对比

Fig. 12 Comparison of conventional and proposed methods

常规算法得到的最优编队位置$P_W$的减阻率为7.3%,但以$P_W$为圆心、半径$r_c$的圆盘全部落入危险域,不满足稳定保持判据。而本文基于概率安全域方法得到的最优减阻阵位$P_S$减阻率为3.3%,但其可保持区面积达46 m$^2$,在米级控制精度约束下即可实现稳定驻留,以放弃部分标称减阻为代价换取可稳定保持的阵位区域,这是概率可行域相对定点方法的实质优势。

综上所述,本文建立了尾涡快速计算模型,并引入蒙特卡洛仿真量化不确定性,运用最大似然估计拟合极值样本概率密度函数,以减阻率为收益指标、滚转控制比为气动风险指标,最终生成三维飞行可行域,为飞机编队乘涡飞行规划几何阵位提供依据。

## 4 结 论

1) 提出了尾涡快速计算—蒙特卡洛不确定性量化—广义极值分布拟合—双重置信度判定的可行域构建流程。以随机两阶段消散模型与Burnham-Hallock诱导速度模型为核心,结合片条理论求解僚机诱导减阻率与滚转力矩,开展蒙特卡洛仿真并求解滚转控制比极值分布函数,可快速得到基于不同置信度的三维危险域。

2) 揭示近中场阶段概率危险域环量衰减而边界外扩的演化趋势。尾涡环量持续衰减、涡核半径扩大,但环境阵风引起的横向与垂向漂移使位置不确定性快速累积,其对危险域边界的贡献超过强度衰减带来的安全裕度,表明编队安全间隔不能仅按强度衰减外推,位置不确定性是中远场安全评估的主导因素。

3) 成功构建了减阻收益与安全约束叠加的编队飞行可行域。通过设定不同的减阻收益目标与安全置信度,可将飞行空间明确划分为可控危险域、绝对危险域、基础减阻区以及高效减阻区。随着纵向间隔增大,增益区截面面积逐渐减小,危险域持续向外扩张。为了应对自动驾驶仪的控制误差与环境演化,需要放弃部分理论减阻效益,以此换取具有更高安全性、可长期稳定保持的减阻阵位区域。

## 参 考 文 献


[1] Airbus. Fello′fly wake energy retrieval concept of operations [R]. Berlin: Eurocontrol, 2021.

[2] Vachon M J, Ray R J, Walsh K R, et al. F/A-18 aircraft performance benefits measured during the autonomous formation flight project[C]// AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit. Monterey, Reston: AIAA, 2002: 4491.

[3] Bieniawski S R, Rosenzweig S, Blake W B. Summary of flight testing and results for the formation flight for aerodynamic benefit program[C]// 52nd Aerospace Sciences Meeting. Maryland: AIAA, 2014: 1457.

[4] Zumegen C, Marks T, Stumpf E. Evaluation of Formation Flights with Long Range Aircraft for Different Flight Conditions and Atmospheric Disturbances[M]. [S.l.]: Deutsche Gesellschaft für Luft-und Raumfahrt-Lilienthal-Oberth eV, 2020.

[5] Spark H, Luckner R. Simplified vortex methods to model wake vortex roll-up in real-time simulations for fuel-saving formation flight[J]. CEAS Aeronautical Journal, 2022, 13(3): 763-778.

[6] 柳文林, 王平, 赵博兴, 等. 双机密集编队飞行尾流影响分析[J]. 飞行力学, 2025, 43(1): 19-25.
Liu Wenlin, Wang Ping, Zhao Boxing, et al. Analysis of wake flow effect of two-aircraft close formation flight[J]. Flight Dynamics, 2025, 43(1): 19-25. (in Chinese)

[7] 李蕴洛, 马铁林, 王致远, 等. 空基集群无人机尾流减阻及编队优化方法研究[J]. 航空工程进展, 2025, 16(4): 168-180.
Li Yunluo, Ma Tielin, Wang Zhiyuan, et al. Research on wake vortex drag reduction and formation optimization methods for air-based swarm unmanned aerial vehicle[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2025, 16(4): 168-180. (in Chinese)

[8] 魏志强, 李晓晨. 基于蒙特卡洛仿真的高空尾涡运动特性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2021, 22(5): 9-14.
Wei Zhiqiang, Li Xiaochen. Analysis of motion characteristics of high-altitude wake vortices based on Monte-Carlo simulation[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2021, 22(5): 9-14. (in Chinese)

[9] 刘沛清. 自由紊动射流理论[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2008.

[10] Holzäpfel F. Probabilistic two-phase wake vortex decay and transport model[J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(2): 323-331.

[11] Wartha N L. Wake vortex characterisation of landing aircraft

using artificial neural networks and LiDAR measurements [D]. Glasgow: University of Glasgow, 2021.

[12] Rojas J I, Melgosa M, Prats X. Sensitivity analysis of maximum circulation of wake vortex encountered by en-route aircraft[J]. Aerospace, 2021, 8(7): 194.

[13] 温瑞英, 刘文瀚, 王红勇. 编队飞行中基于危险区域的后机最优位置研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2022(5): 300-308.
Wen Ruiying, Liu Wenhan, Wang Hongyong. Optimal position of trailing aircraft based on hazard zone in formation flight [J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2022(5): 300-308. (in Chinese)

[14] Schwarz C W, Hahn K U. Full-flight simulator study for wake vortex hazard area investigation [J]. Aerospace Science and Technology, 2006, 10(2): 136-143.

[15] Etkin B. Dynamics of atmospheric flight[M]. Reston: Courier Corporation, 2005.

[16] Spreiter J R, Sacks A H. The rolling up of the trailing vortex sheet and its effect on the downwash behind wings[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1951, 18(1): 21-32.

[17] Katz J, Plotkin A. Low speed aerodynamics[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[18] Rossow V J. Lift-generated vortex wakes of subsonic transport aircraft[J]. Progress in Aerospace Sciences, 1999, 35(6): 507-660.

[19] Körner S, Holzäpfel F. Multi-model ensemble wake vortex prediction[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2016, 88(2): 331-340.

[20] Rubinstein R Y, Kroese D P. Simulation and the Monte Carlo method[M]. Berlin: Wiley, 2007.

[21] Kim S H, Kim J, Kim J H, et al. Characteristics of the derived energy dissipation rate using the 1 Hz commercial aircraft quick access recorder (QAR) data[J]. Atmospheric Measurement Techniques, 2022, 15(7): 2277-2298.

[22] Kaluza T, Williams P D, Schultz D M, et al. Climatology of upper-tropospheric turbulence: Capabilities and limitations of aircraft reports and ERA5 reanalysis diagnostics[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2026, 152(775): 70073.

[23] Coles S. An introduction to statistical modeling of extreme values[M]. London: Springer London, 2001.

[24] Myung I J. Tutorial on maximum likelihood estimation[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2003, 47(1): 90-100.

[25] 何萌, 白俊强, 昌敏, 等. 翼型气动优化设计问题多极值特性研究[J]. 航空工程进展, 2019, 10(5): 664-672.
He Meng, Bai Junqiang, Chang Min, et al. Study on multimodality in aerodynamic airfoil optimization design[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2019, 10(5): 664-672. (in Chinese)

[26] Morio J, Balesdent M. Estimation of rare event probabilities in complex aerospace and other systems: a practical approach [M]. London: Woodhead Publishing, 2015.

[27] Federal Aviation Administration. Aeronautical information manual [R]. Washington, D. C.: Federal Aviation Administration, 2026.

[28] Hanson C, Ryan J, Allen M, et al. An overview of flight test results for a formation flight autopilot[C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Monterey: AIAA, 2002: 4755.

(编辑:丛艳娟)